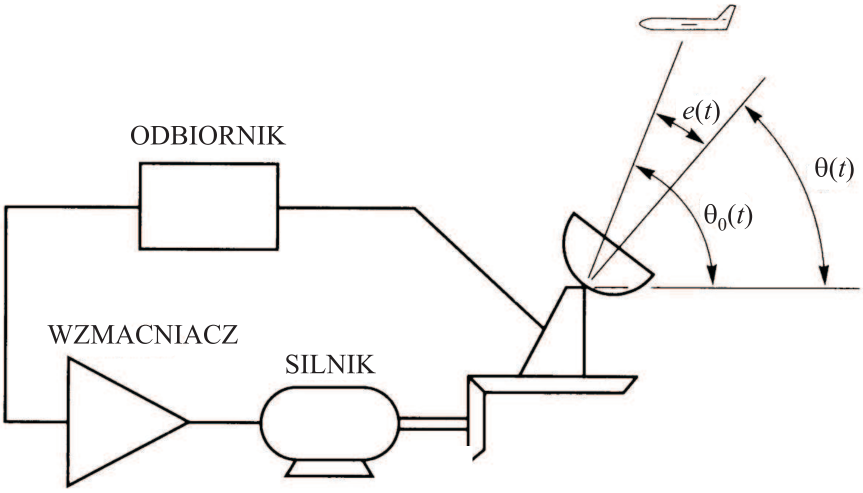
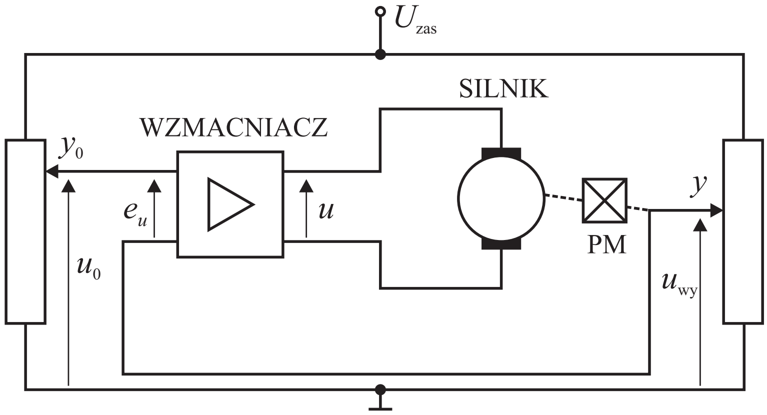
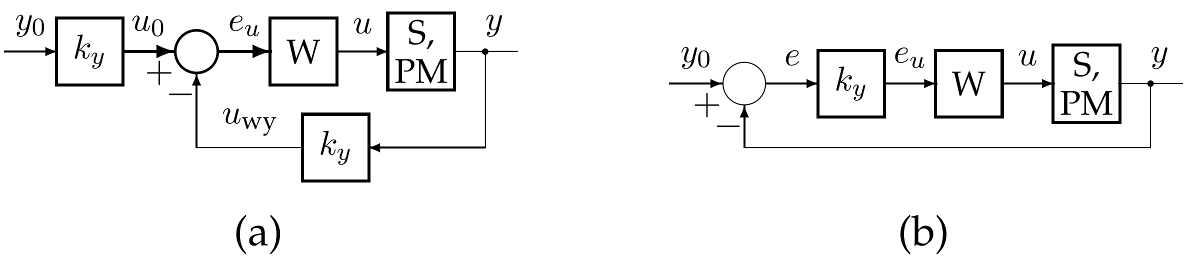
50. Serwomechanizm liniowy



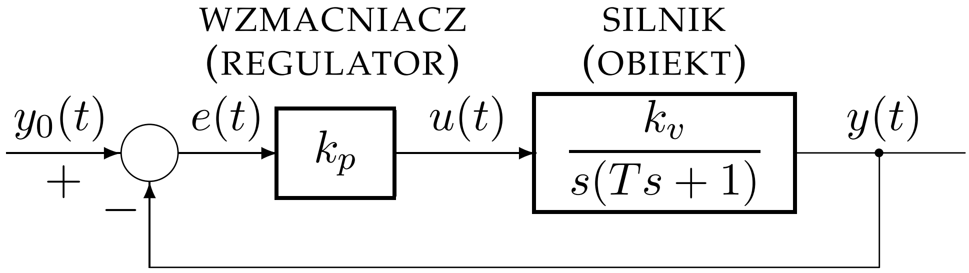
Rys. 140.



Rys. 141.



Rys. 142.



Rys. 143.

$$G_o(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{k_p k_v}{s(Ts+1)}$$

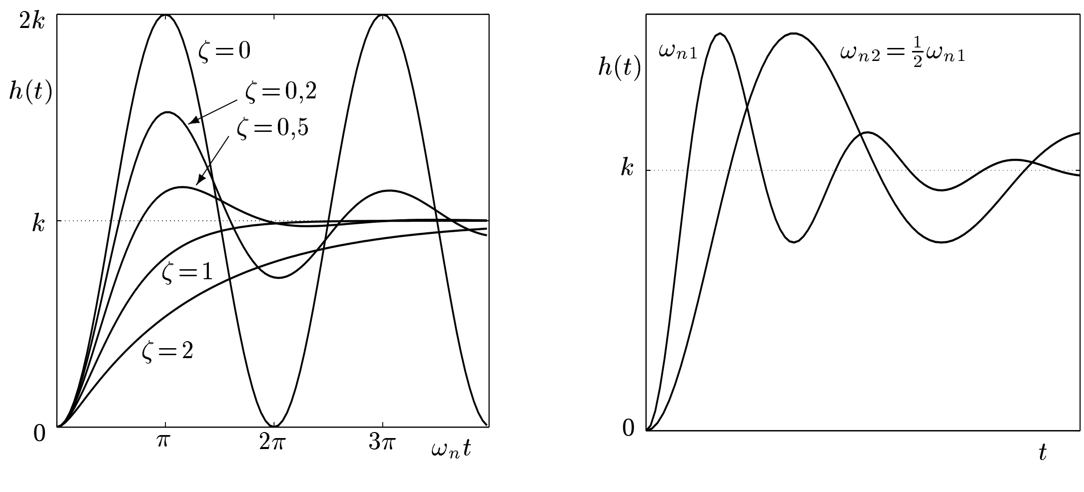
$$G(s) = \frac{Y(s)}{Y_0(s)} = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)} = \frac{k_p k_v}{k_p k_v + s(Ts+1)} = \\ = \frac{k_p k_v}{Ts^2 + s + k_p k_v} = \frac{k_p k_v/T}{s^2 + s/T + k_p k_v/T} \tag{157}$$

$$G(s) = \frac{k}{T_n^2 s^2 + 2\zeta T_n s + 1} = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_p k_v}{T}}, \quad 2\zeta\omega_n = \frac{1}{T}, \quad k = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2\zeta\sqrt{\frac{k_p k_v}{T}} = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{Tk_p k_v}}$$

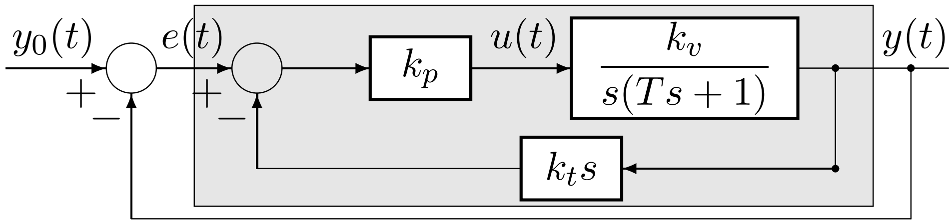
$k_v, T =$ const, $k_p =$ var; $\quad k_p \nearrow \Rightarrow \omega_n \nearrow$ (dobrze), $\zeta \searrow$ (źle)



(a) (b)

Rys. 144.

51. Tachometryczne sprzężenie zwrotne



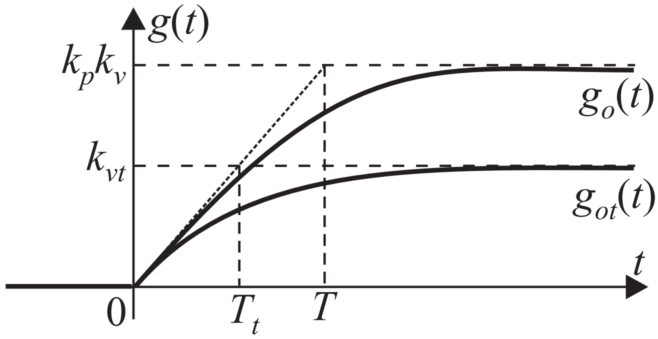
Rys. 145.

$$G_{ot}(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{G_o(s)}{1 + k_t s G_o(s)} = \frac{\frac{k_p k_v}{s(Ts+1)}}{1 + k_t s \frac{k_p k_v}{s(Ts+1)}} =$$

$$= \frac{k_p k_v}{s(Ts + 1 + k_t k_p k_v)} = \frac{k_{vt}}{s(T_t s + 1)}, \tag{158}$$

gdzie

$$k_{vt} = \frac{k_p k_v}{1 + k_t k_p k_v}, \qquad T_t = \frac{T}{1 + k_t k_p k_v}$$



Rys. 146.

$$g_o(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G_o(s)\}, \qquad g_{ot}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G_{ot}(s)\}$$

k_{vt} i T_t są zmniejszone w identycznej proporcji względem k_v i T; ponadto:

$$\left.\frac{dg_o(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{dg_{ot}(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

Parametry układu zamkniętego ze sprzęż. tachometrycznym:

$$G(s) = \frac{k\omega_{nt}^2}{s^2 + 2\zeta_t\omega_{nt}s + \omega_{nt}^2}$$

$$\omega_{nt} = \sqrt{\frac{k_{vt}}{T_t}} = \sqrt{\frac{k_p k_v}{T}} = \omega_n \tag{159}$$

$$\zeta_t = \frac{1}{2\sqrt{T_t k_{vt}}} = \frac{1 + k_t k_p k_v}{2\sqrt{T k_p k_v}} = (1 + k_t k_p k_v)\zeta \tag{160}$$

Dla utrzymania niezmienionej wartości ζ w układzie ze sprzężeniem tachometrycznym:

$$\zeta_t = \zeta \quad \Rightarrow \quad \frac{1 + k_t k_{pz} k_v}{2\sqrt{T k_{pz} k_v}} = \frac{1}{2\sqrt{T k_{po} k_v}} \tag{161}$$

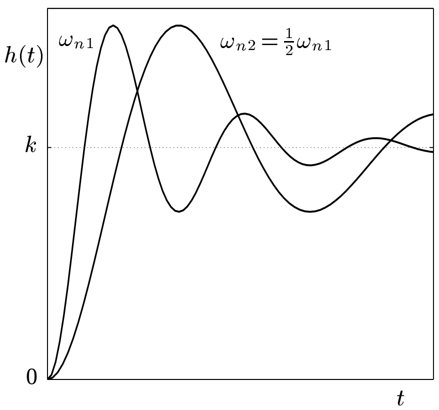
k_{po} – wzm. regulatora w ukł. bez sprzężenia tachometrycznego
k_{pz} – wzm. regulatora w ukł. ze sprzężenia tachometrycznym

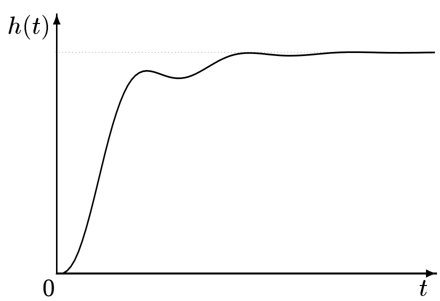
zał. $1 + k_t k_{pz} k_v = a \;\Rightarrow\; k_{pz} = a^2 k_{po} \;\Rightarrow\; \omega_{nt} = \sqrt{\frac{a^2 k_{po} k_v}{T}} = a\omega_n$

Przykład

$$a = 2 \quad \Rightarrow \quad k_{pz} = 4k_{po}$$

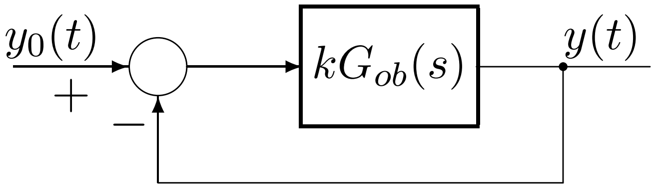
$$1 + k_t k_{pz} k_v = 2 \;\Rightarrow\; 1 + 4k_t k_{po} k_v = 2 \;\Rightarrow\; k_t = \frac{1}{4k_{po}k_v}$$





(a) Rys. 147. (b) $G_t(s) = \frac{k_t s}{1+\tau s}$

52. Metoda linii pierwiastkowych



Rys. 148.

$$G_o(s) = kG_{ob}(s) = k\frac{L_{ob}(s)}{M_{ob}(s)} =$$

$$= k\frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \quad m \leqslant n \tag{162}$$

dla układu otwartego:

$$y_1(t) \leftrightarrow k_1, \quad y_2(t) \leftrightarrow k_2 \quad \Rightarrow \quad y_2(t) = \frac{k_2}{k_1} y_1(t)$$

transmitancja układu zamkniętego:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{Y_0(s)} = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{kG_{ob}(s)}{1 + kG_{ob}(s)} = \frac{kL_{ob}(s)}{kL_{ob}(s) + M_{ob}(s)} \tag{163}$$

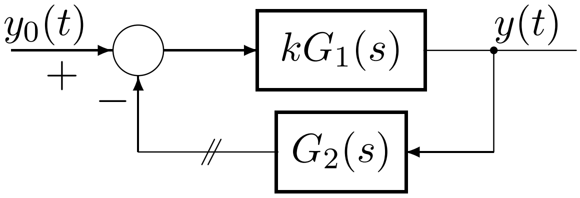
równanie charakterystyczne układu zamkniętego:

$$1 + G_o(s) = 1 + kG_{ob}(s) = 0 \tag{164}$$

$$kG_{ob}(s) = k\frac{L_{ob}(s)}{M_{ob}(s)} = k|G_{ob}(s)|e^{j\varphi_{ob}(s)} = -1 \tag{165}$$

$$\begin{cases} k|G_{ob}(s)| = 1 & \text{(warunek modułu)} \\ \varphi_{ob}(s) = \pm(2i+1)\pi, \quad i = 0, 1, 2, \ldots & \text{(warunek fazy)} \end{cases} \tag{166}$$

$$0 \leqslant k < \infty$$



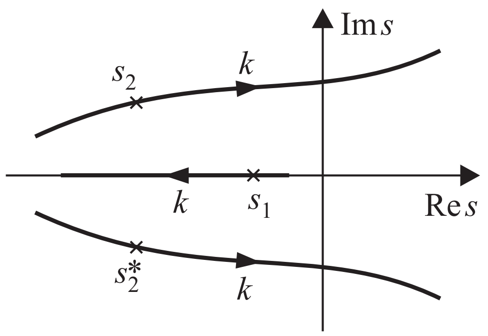
Rys. 149.

$$G_o(s) = kG_1(s)G_2(s) = kG_{ob}(s) \tag{167}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{Y_0(s)} = \frac{kG_1(s)}{1 + kG_1(s)G_2(s)} \tag{168}$$

53. Własności linii pierwiastkowych

1. są symetryczne względem osi rzeczywistej (gdyż współczynniki wielomianów $L_{ob}(s)$ i $M_{ob}(s)$ są rzeczywiste)



Rys. 150.

2. l.p. zaczynają się (tzn. dla $k = 0$) w biegunach transm. $G_o(s)$
   $k|G_{ob}(s)| = 1: \quad k \to 0 \;\Rightarrow\; |G_{ob}(s)| \to \infty$, czyli $M_{ob}(s) \to 0$
3. l.p. kończą się w zerach transmitancji $G_o(s)$
   $k|G_{ob}(s)| = 1: \quad k \to \infty \;\Rightarrow\; |G_{ob}(s)| \to 0$, czyli $L_{ob}(s) \to 0$
4. liczba l.p. jest równa liczbie biegunów transmitancji $G_o(s)$
5. gdy $m < n$, liczba l.p. kończących się w zerach $G_o(s)$ jest równa m; dla pozostałych linii:
   $k|G_{ob}(s)| = 1: \quad k \to \infty \;\Rightarrow\; |G_{ob}(s)| \to 0$, czyli $s \to \infty$

6. $(n-m)$ asymptot – proste tworzące ramiona symetrycznej gwiazdy o następujących parametrach:
   - kąt nachylenia i-tej asymptoty wzgl. osi rzeczywistej:

   $$\phi_{ai} = \frac{(2i+1)\pi}{n-m}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-m-1,$$

   - punkt przecięcia asymptot znajduje się na osi rzeczywistej w punkcie o odciętej:

   $$s_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i - \sum_{j=1}^{m} \sigma_j}{n-m},$$

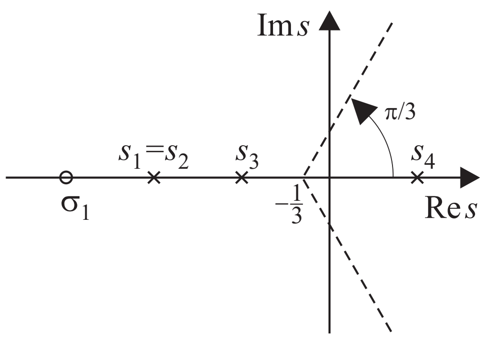
   s_i – i-ty biegun, σ_j – j-te zero transmitancji $G_o(s)$

   Przykład

   $$G_o(s) = \frac{s+3}{(s+2)^2(s+1)(s-1)}, \qquad n-m=3$$

   $$\sigma_1 = -3, \quad s_1 = s_2 = -2, \quad s_3 = -1, \quad s_4 = 1$$

   $$\phi_{a0} = \frac{\pi}{3}, \quad \phi_{a1} = \pi, \quad \phi_{a2} = \frac{5\pi}{3}, \quad s_a = \frac{(-2-2-1+1)-(-3)}{3} = -\frac{1}{3}$$

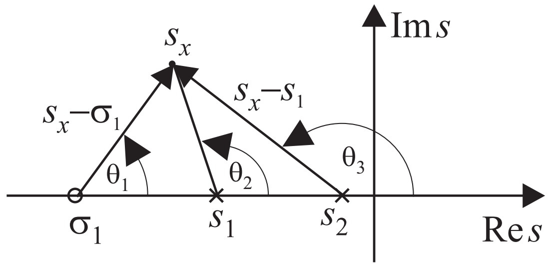


Rys. 151.

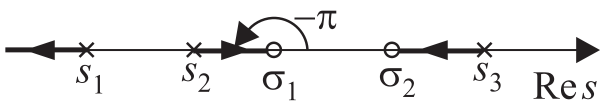
7. bieguny wielokrotne są punktami wspólnymi odpowiednich l.p.

8. odcinki l.p. na osi rzeczywistej

$$G_o(s) = k\frac{s-\sigma_1}{(s-s_1)(s-s_2)} \quad \Rightarrow \quad \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 = \pm\pi$$



Rys. 152.



Rys. 153.

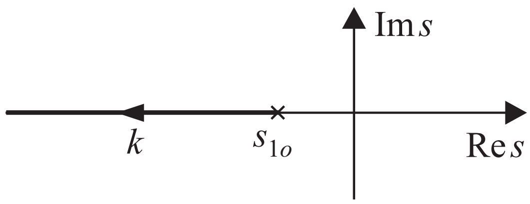
Przykład

$$G_o(s) = \frac{k}{Ts+1} = \frac{k/T}{s+1/T}, \qquad s_{1o} = -\frac{1}{T}$$

warunek (165) przyjmie postać:

$$\frac{k/T}{s+1/T} = -1 \quad \Rightarrow \quad s + \frac{1}{T} + \frac{k}{T} = 0 \quad \Rightarrow \quad s + \frac{k+1}{T} = 0$$

$$s_1 = -\frac{k+1}{T} = -\frac{k}{T} + s_{1o}$$



Rys. 154.

Przykład

$$G_o(s) = \frac{k_v}{s(Ts+1)} = \frac{k}{s(s+1/T)}, \quad s_{1o} = -\frac{1}{T}, \quad s_{2o} = 0, \quad k = \frac{k_v}{T}$$

$$G_o(s) = \frac{k}{s(s-s_{1o})} = -1$$

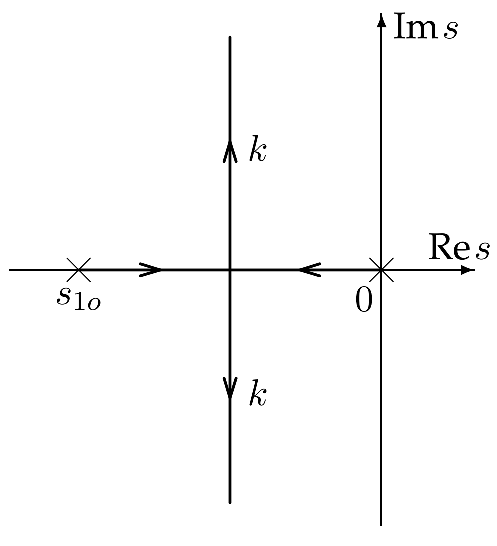
$$s^2 - s_{1o}s + k = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = s_{1o}^2 - 4k$$

$$k = 0 \quad \Rightarrow \quad s_1 = s_{1o}, \quad s_2 = 0$$

$$\Delta > 0 \quad \Rightarrow \quad s_{1,2} = \frac{s_{1o}}{2} \pm \sqrt{\frac{s_{1o}^2}{4} - k}$$

$$\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad s_1 = s_2 = \frac{s_{1o}}{2}, \quad k = \frac{s_{1o}^2}{4}$$

$$\Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad s_{1,2} = \frac{s_{1o}}{2} \pm j\sqrt{k - \frac{s_{1o}^2}{4}}$$

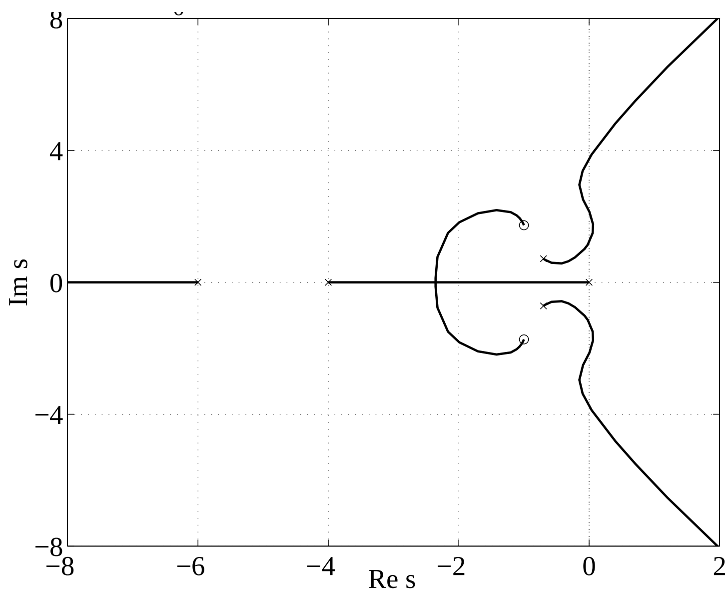


Rys. 155.

$$s_{1,2} = -\omega_n(\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2})$$

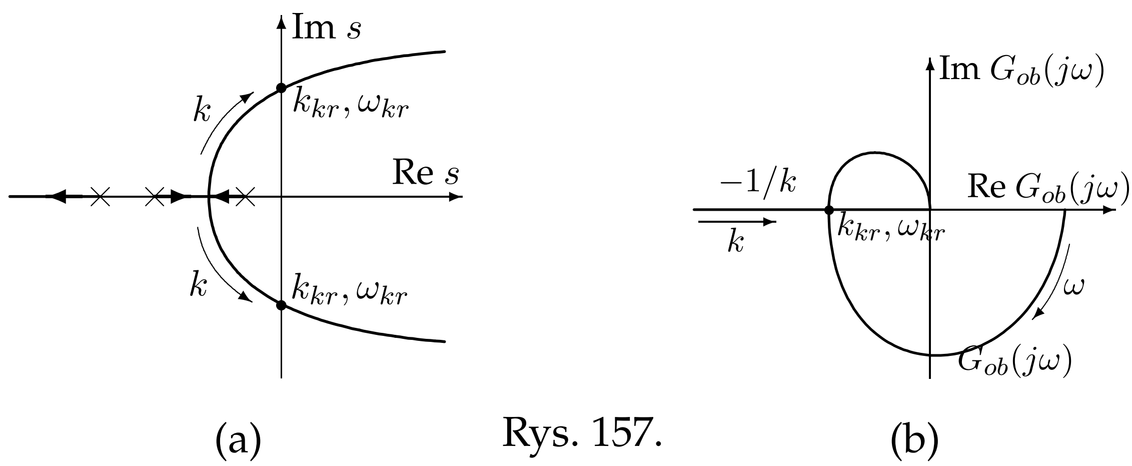
Przykład $$G_o(s) = \frac{k(s^2+2s+4)}{s(s+4)(s+6)(s^2+1{,}4s+1)}$$

```
l=[1,2,4];
m1=conv([1,0],[1,4]);
m2=conv([1,6],[1,1.4,1]);
m=conv(m1,m2);
rlocus(l,m);
xlabel('Re s'); ylabel('Im s'); grid
```



Rys. 156.

54. Związek linii pierwiastkowych z kryterium Nyquista



Rys. 157.

$$G_{ob}(j\omega) = -1/k \qquad \omega = \omega_{kr}, \quad k = k_{kr}$$

55. Linie o stałym współczynniku tłumienia ζ i pulsacji drgań własnych ω_n na płaszczyźnie zespolonej

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{169}$$

$$\Delta = 4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2 = 4\omega_n^2(\zeta^2 - 1)$$

$$\zeta \in \langle 0, 1) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\Delta} = j2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

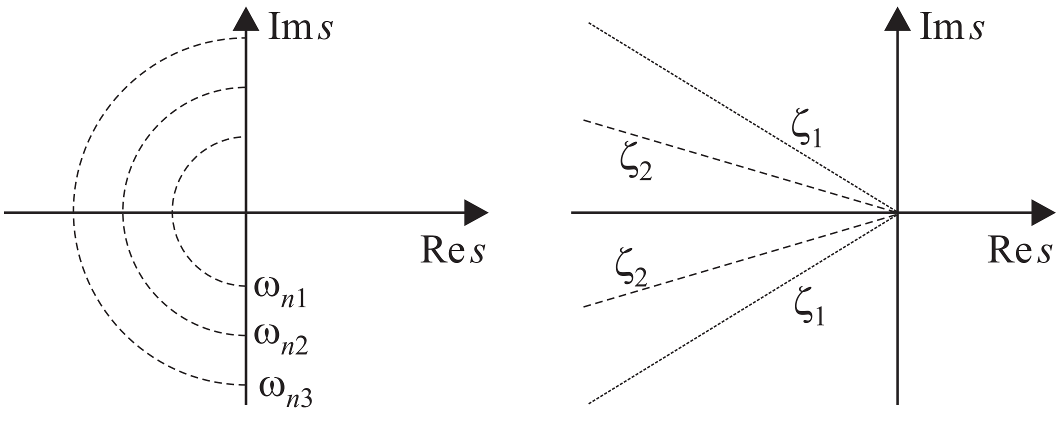
$$s_1 = \frac{-2\omega_n\zeta - j2\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{2} = -\omega_n(\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2})$$

$$s_2 = -\omega_n(\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2})$$

1. $\omega_n = \text{const}, \zeta = \text{var}$

$$p = -\omega_n\zeta, \quad p \leqslant 0, \qquad q = \pm\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\zeta^2 = \frac{p^2}{\omega_n^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{q^2}{\omega_n^2} = 1 - \zeta^2 = 1 - \frac{p^2}{\omega_n^2} \quad \Rightarrow \quad p^2 + q^2 = \omega_n^2, \ p \leqslant 0$$



(a) $\omega_{n1} < \omega_{n2} < \omega_{n3}$ (b) $\zeta_1 < \zeta_2$

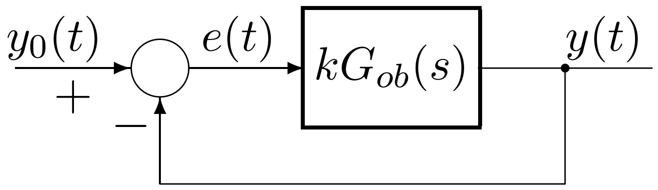
Rys. 158.

2. $\zeta = \text{const}, \omega_n = \text{var}$

$$\frac{q}{p} = \frac{\pm\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{-\omega_n\zeta} = \mp\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

```
sgrid(zeta,w_n)
sgrid('new')
```

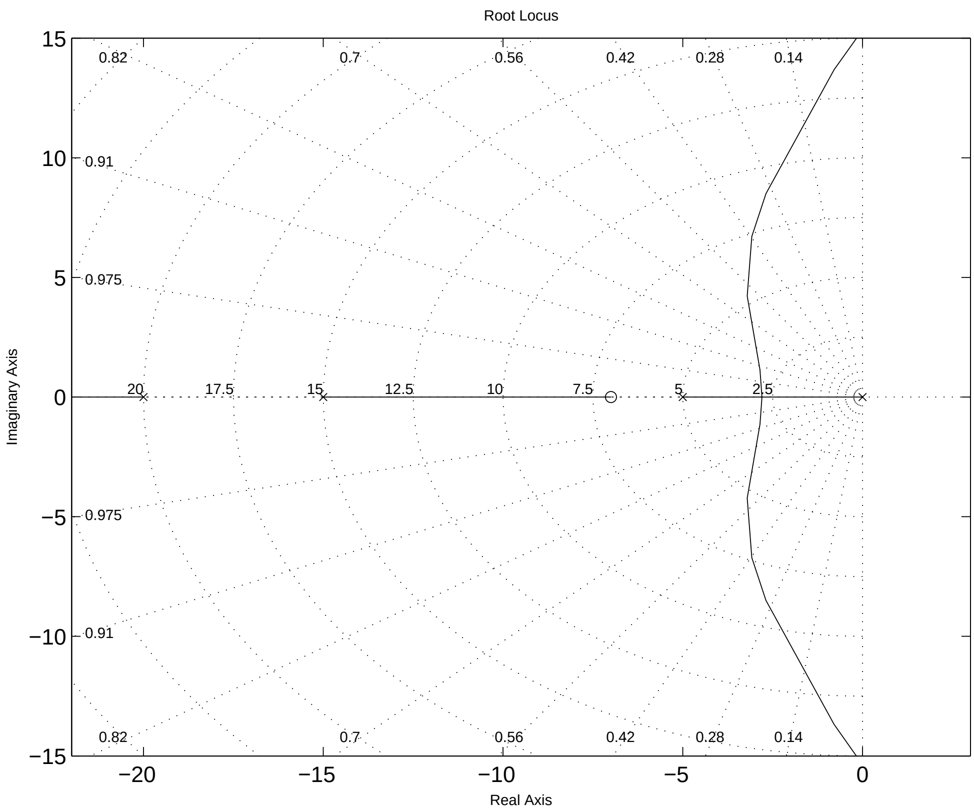
Przykład



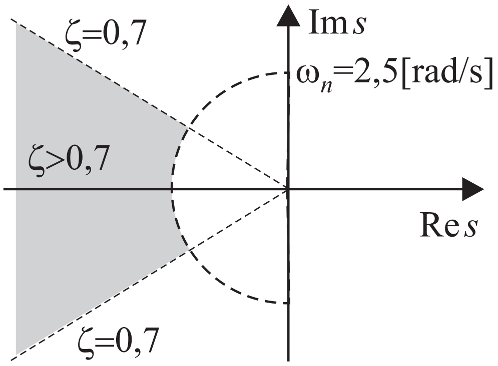
Rys. 159.

$$G_{ob}(s) = \frac{s+7}{s(s+5)(s+15)(s+20)}, \qquad \zeta > 0{,}7, \quad \omega_n > 2{,}5[\text{rad/s}]$$

```
l=[1 7];
m1=conv([1 0],[1 5]);
m2=conv([1 15],[1 20]);
m=conv(m1,m2);
rlocus(l,m);
axis([-22 3 -15 15]), grid on
```



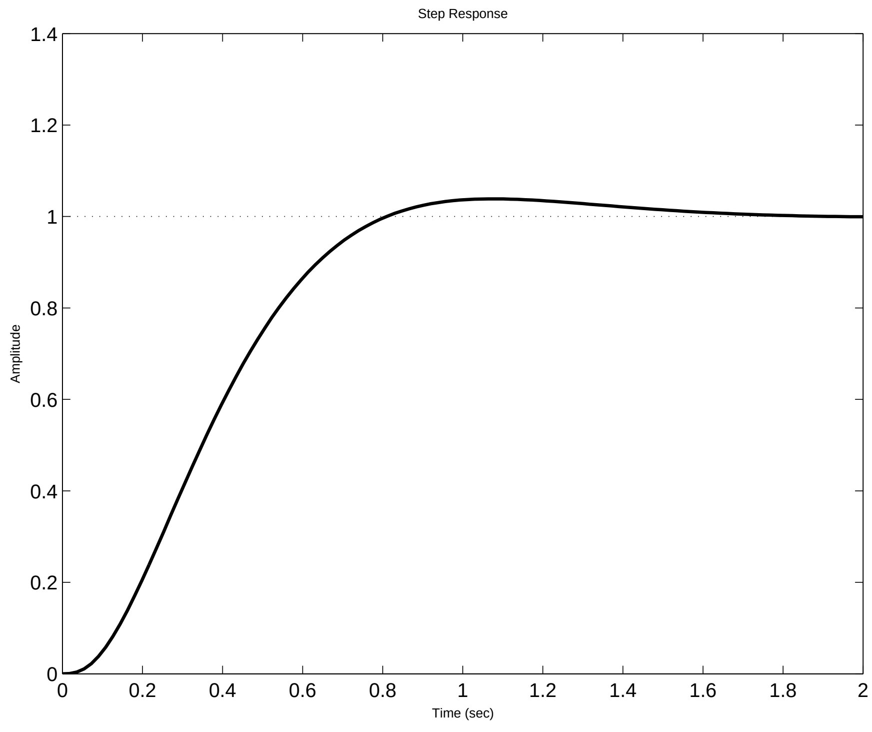
Rys. 160. $s_a = (-40+7)/3 = -11$



Rys. 161.

```
[k,bieguny]=rlocfind(l,m)
 k = 614.9633
 bieguny = -22.9803
           -10.9013
  -3.0592 + 2.7973i
  -3.0592 - 2.7973i

Go=tf(k*l,m)
G=feedback(Go,1), step(G)
```



Rys. 162.