# 5. Kryterium stabilności Routha

$$
\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \dots & \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & \dots & & \\
\dots & \dots\dots\dots\dots & & & &
\end{array}
\tag{20}
$$

$$
b_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}, \quad
b_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}, \quad
b_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}, \quad \dots
$$

$$
c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{-b_1}, \quad
c_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{-b_1}, \quad \dots
$$

$$
d_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{-c_1}, \qquad
d_2 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}}{-c_1}, \quad \dots
$$

$$
G(s) = \frac{L(s)}{M(s)}, \qquad M(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0
$$

**Przykład**

$$M(s) = (s+2)(s^2 - s + 4) = s^3 + s^2 + 2s + 8 = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 1 & 8 \\ s^1 & -6 & \\ s^0 & 8 & \end{array} \qquad b_1 = -\frac{1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -6, \quad c_1 = -\frac{1}{-6}\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 8$$

układ niestabilny, 2 bieguny w prawej półpłaszcz. zespolonej

**Przykład**

$M(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10 = 0$

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 2 & 11 \\ s^4 & 2 & 4 & 10 \\ s^3 & \epsilon & 6 & \\ s^2 & -\frac{12}{\epsilon} & 10 & \\ s^1 & 6 & & \\ s^0 & 10 & & \end{array}$$

$$b_1 = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \approx \epsilon, \quad b_2 = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 6,$$

$$c_1 = -\frac{1}{\epsilon}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ \epsilon & 6 \end{vmatrix} \approx -\frac{12}{\epsilon}, \quad c_2 = -\frac{1}{\epsilon}\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ \epsilon & 0 \end{vmatrix} = 10,$$

$$d_1 = \frac{\epsilon}{12}\begin{vmatrix} \epsilon & 6 \\ -\frac{12}{\epsilon} & 10 \end{vmatrix} = \frac{\epsilon}{12}\left(10\epsilon + 6\frac{12}{\epsilon}\right) \approx 6, \; e_1 = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -\frac{12}{\epsilon} & 10 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 10$$

układ niestabilny, 2 bieguny w prawej półpłaszcz. zespolonej

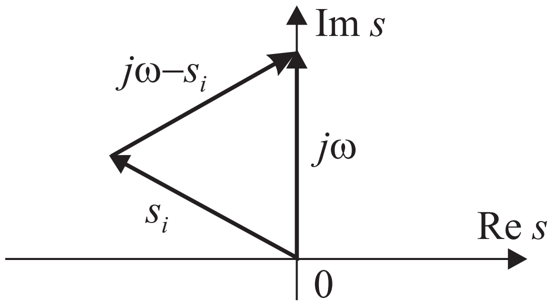
```
  p = [1 2 2 4 11 10];
  roots(p)
ans =
   0.8950 + 1.4561i,   0.8950 - 1.4561i
  -1.2407 + 1.0375i,  -1.2407 - 1.0375i
  -1.3087
```

## 6. Kryterium Michajłowa (częstotliwościowe)

$$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)}, \qquad M(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots a_1 s + a_0 =$$

$$= a_n(s - s_1)(s - s_2)\ldots(s - s_n)$$

$$M(j\omega) = M(s)\Big|_{s=j\omega} = a_n(j\omega - s_1)(j\omega - s_2)\ldots(j\omega - s_n)$$

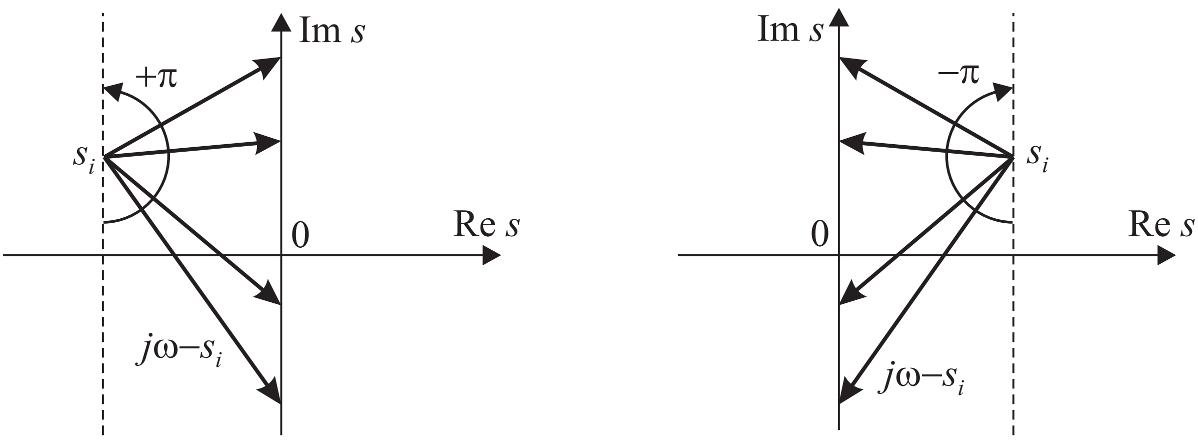



Rys. 18.

$$\boxed{Z(j\omega) = |Z(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}, \qquad \varphi(\omega) = \arg Z(j\omega)}$$

$$\mathrm{Re}(s_i) < 0 \quad \Rightarrow \quad \underset{-\infty<\omega<\infty}{\Delta \arg} (j\omega - s_i) = +\pi$$

$$\mathrm{Re}(s_i) > 0 \quad \Rightarrow \quad \underset{-\infty<\omega<\infty}{\Delta \arg} (j\omega - s_i) = -\pi$$




Rys. 19.

$$\Delta \arg M(j\omega) = \sum_{i=1}^{n} \Delta \arg(j\omega - s_i) \tag{21}$$

Jeśli w prawej półpł. zespolonej $l$ pierwiastków $M(j\omega)$, to:

$$\underset{-\infty<\omega<\infty}{\Delta \arg} M(j\omega) = l(-\pi) + (n-l)\pi = (n-2l)\pi$$

Jeśli układ asymptotycznie stabilny ($l = 0$), to:

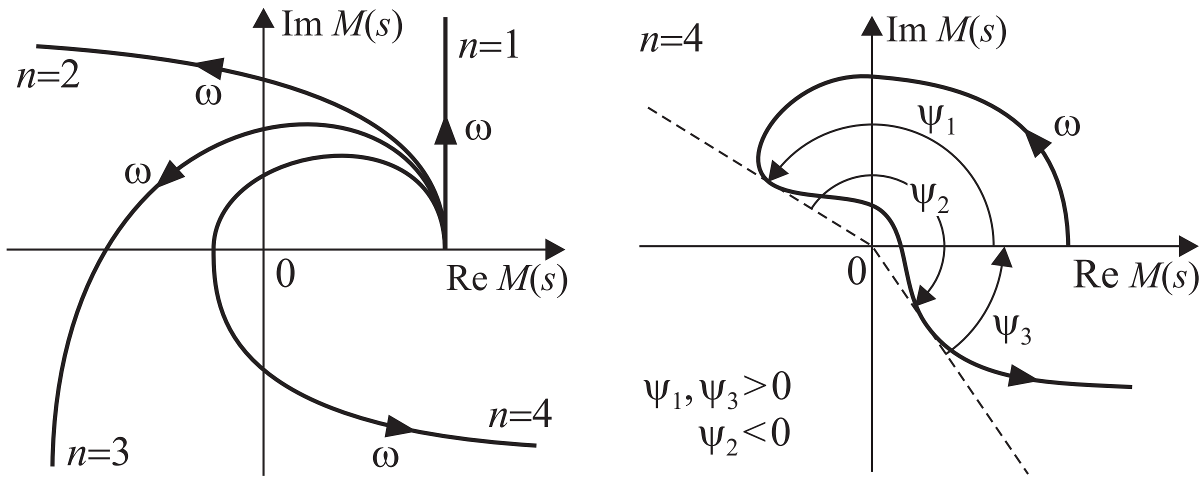
$$\underset{-\infty<\omega<\infty}{\Delta \arg} M(j\omega) = n\pi$$

$$\text{Re}[M(-j\omega)] = \text{Re}[M(j\omega)], \qquad \text{Im}[M(-j\omega)] = -\text{Im}[M(j\omega)]$$

$$-\infty < \omega < \infty \quad \rightarrow \quad 0 \leqslant \omega < \infty$$

$$\underset{0\leqslant\omega<\infty}{\Delta \arg} M(j\omega) = n\frac{\pi}{2} \qquad (\Rightarrow \quad \text{Re}(s_i) < 0, \ \ i = 1, 2, \ldots n) \tag{22}$$

$$\underset{0\leqslant\omega<\infty}{\Delta \arg} M(j\omega) = (n-2l)\frac{\pi}{2} \tag{23}$$




(a) układy stabilne (b) układ niestabilny

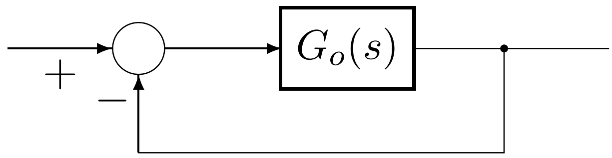
Rys. 20.

układ niestabilny ponieważ

$$\underset{0\leqslant\omega<\infty}{\Delta \arg} M(j\omega) = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = 0$$

$$(n-2l)\frac{\pi}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{dla} \ \ n = 4 \ \ \text{jest} \ \ l = 2$$

# 7. Kryterium Nyquista



Rys. 21.

$$G_o(s) = \frac{L_o(s)}{M_o(s)} \quad \rightarrow \quad G_z(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{L_o(s)}{L_o(s) + M_o(s)} \tag{24}$$

równ. charakteryst. ukł. otwartego: $M_o(s) = 0$;
równ. charakteryst. ukł. zamkniętego: $M_z(s) = L_o(s) + M_o(s) = 0$;
wielom. charakt. $M_z(s)$ ma te same miejsca zerowe, co wyrażenie:

$$1 + G_o(s) = \frac{L_o(s) + M_o(s)}{M_o(s)}$$

jeśli $G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$, to ozn. $\arg[G(j\omega)] = \varphi(\omega)$

$$\underset{0\leqslant\omega<\infty}{\Delta \arg}[1+G_o(j\omega)] = \underset{0\leqslant\omega<\infty}{\Delta \arg}[\underbrace{L_o(j\omega) + M_o(j\omega)}_{M_z(j\omega)}] - \underset{0\leqslant\omega<\infty}{\Delta \arg}[M_o(j\omega)] \tag{25}$$

Jeśli ukł. zamknięty jest stabilny, wówczas na podst. kryterium Michajłowa:

$$\underset{0\leqslant\omega<\infty}{\Delta \arg}[M_z(j\omega)] = \underset{0\leqslant\omega<\infty}{\Delta \arg}[L_o(j\omega) + M_o(j\omega)] = n\frac{\pi}{2} \tag{26}$$

($n =$ st. $M_z(s) =$ st. $M_o(s)$ gdyż st. $L_o(s) \leqslant$ st. $M_o(s)$)

Jeśli ukł. otwarty jest stabilny, to

$$\underset{0\leqslant\omega<\infty}{\Delta \arg}[M_o(j\omega)] = n\frac{\pi}{2}, \tag{27}$$

a jeśli niestabilny ($l$ biegunów w prawej półpł. zesp.), to

$$\underset{0\leqslant\omega<\infty}{\Delta \arg}[M_o(j\omega)] = (n - 2l)\frac{\pi}{2}. \tag{28}$$

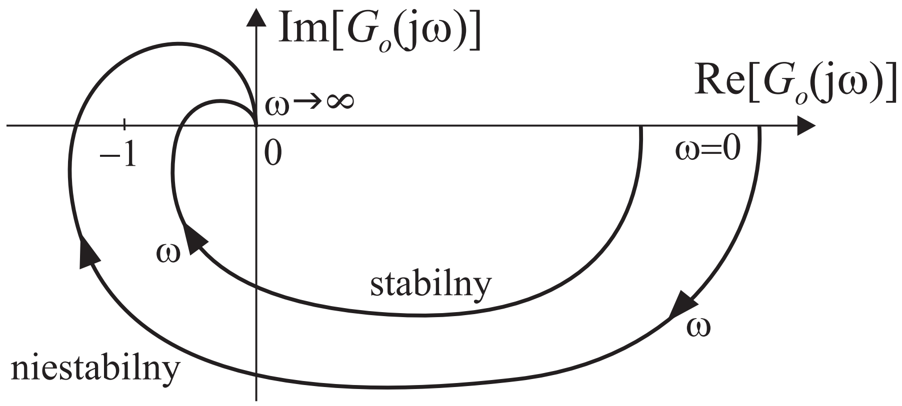
Jeśli ukł. otwarty jest stabilny, to ukł. zamkn. też stabilny jeśli

$$\underset{0\leqslant\omega<\infty}{\Delta}\arg\left[1+G_o(j\omega)\right]=n\frac{\pi}{2}-n\frac{\pi}{2}=0, \tag{29}$$

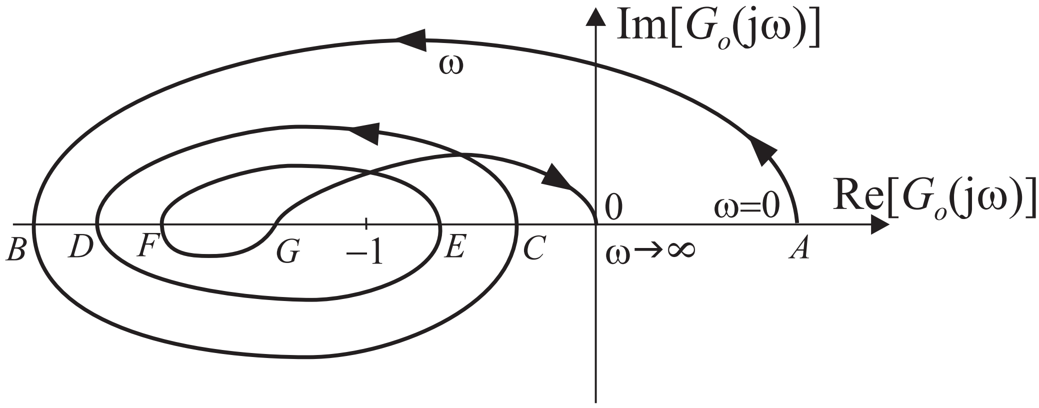
a jeśli ukł. otwarty jest niestabilny, to ukł. zamkn. stabilny jeśli

$$\underset{0\leqslant\omega<\infty}{\Delta}\arg\left[1+G_o(j\omega)\right]=n\frac{\pi}{2}-(n-2l)\frac{\pi}{2}=l\pi=\frac{l}{2}\cdot 2\pi \tag{30}$$

$(-1, j0)$, $\quad l=k_1+2k_2+3k_3+\ldots$




Rys. 22.




Rys. 23.

$$\left.\begin{array}{ll} AB:\ \Delta_1\varphi=\pi, & EF:\ \Delta_5\varphi=\pi,\\ BC:\ \Delta_2\varphi=\pi, & FG:\ \Delta_6\varphi=0,\\ CD:\ \Delta_3\varphi=\pi, & G0:\ \Delta_7\varphi=-\pi,\\ DE:\ \Delta_4\varphi=\pi, & \end{array}\right\}\Delta\varphi=\sum\Delta_i\varphi=4\pi$$